Зимний тур XXI Турнира Архимеда
Решения задач

1. (3 балла) Особенный день. Петя заметил, что дата проведения Турнира Архимеда, записанная восемью цифрами (22.01.2012) обладает интересной особенностью: переставив первые четыре цифры можно получить номер года. А какие ещё даты в этом году имеют такое же свойство?

Ответ: 1) 12.02.2012; 2) 21.02.2012; 3) 22.10.2012; 4) 02.12.2012; 5) 20.12.2012.

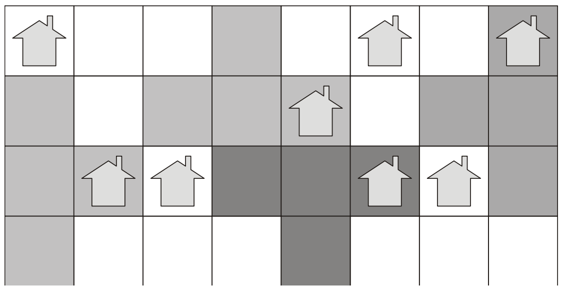
Решение.

На месте цифр месяца могут стоять только 01, 02, 10, 12.
Если 01 тогда: 22.01.2012.
Если 02 тогда: 12.02.2012 или 21.02.2012.
Если 10 тогда: 22.10.2012.
Если 12 тогда: 02.12.2012 или 20.12.2012.

Примечание: последняя дата не требует перестановки первых 4-х цифр. Если ее не указывали, баллы не снижались. Наиболее часто забывали указывать дату 22.10.2012

2. (4 балла) Дачные участки. Требуется разбить участок земли на 8 одинаковых дачных участков. Границы участков должны проходить по линиям сетки, на каждом участке должен располагаться домик.

Решение: пример см. рис.



Возможны и другие решения.

Примечание:

По одинаковыми подразумевалось полное совпадение фигур как по площади, так и по форме. Об этом было сказано всем участникам при ответах на вопросы по условиям.

3. (5 баллов) Вася и Коля плавают в бассейне по соседним дорожкам. Стартуют они одновременно с противоположных концов бассейна, «встречаются» и плывут дальше. Доплыв до конца дорожки, они мгновенно разворачиваются, опять «встречаются» и так далее. Вася проплывает дорожку за 5 мин, а Коля за 7 мин. Через какое время после старта Вася впервые догонит Колю, плывя с ним в одном направлении?

Ответ: через 17,5 минут

Решение 1.

Вася нагонит Колю, плывя с ним в одном направлении, когда разница в расстоянии, которое они проплыли, станет равной равна длине дорожки.

Разделим дорожку на 35 условных единиц длины. Тогда, разница в скорости Васи и Коли составляет 2 единицы в минуту. Разница в 35 единиц будет покрыта через $35 : 2 = 17{,}5$ мин.

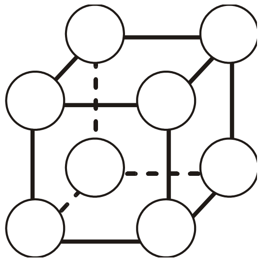
Решение 2.

Составим уравнение:

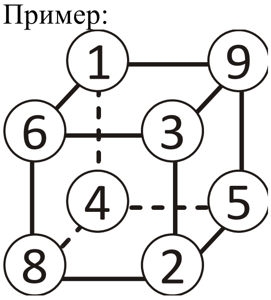
$\frac{l}{5}t = \frac{l}{7}t + l$, где l – длина дорожки, а t – время, через которое разница в проплытом расстоянии между ними станет равна длине дорожки. Откуда $t = 17{,}5$ мин.

Возможны и другие подходы к решению.

4. (6 баллов) Куб. Можно ли вычеркнуть одно из натуральных чисел от 1 до 9, а оставшиеся числа расставить в вершинах куба так, чтобы суммы чисел на каждой грани куба были равны между собой, но не были кратны вычеркнутому числу?



Ответ: можно.
Решение.
Пример:



Возможны другие примеры.
Можно доказать, что вычеркнутой цифрой может быть только 7, но от участников этого не требовалось.

5. (6 баллов) В мешке лежат золотые монеты: дублоны, дукаты и пиастры, одинаковые на ощупь. Если из мешка вынуть 10 монет, то среди них обязательно окажется хотя бы один дублон, если вынуть 9 монет – окажется хотя бы один дукат, если же вынуть 8 монет, – хотя бы один пиастр. Какое наибольшее количество монет могло быть в мешке?
Ответ: 12 монет.
Решение.
Оценка:
1) В мешке не более 9 дукатов и пиастров (вместе взятых), – иначе среди выбранных 10 монет могло не оказаться ни одного дублона.
2) В мешке не более 8 дублонов и пиастров (вместе взятых), – иначе среди выбранных 9 монет могло не оказаться ни одного дуката.
3) В мешке не более 7 дублонов и дукатов (вместе взятых), – иначе среди выбранных 8 монет могло не оказаться ни одного пиастра.
4) Итого не более 24 монет при условии, что мы каждую монету считали дважды. Следовательно, в мешке не более 12 золотых монет.
Пример: 3 дублона, 4 дуката, 5 пиастров.
Примечания:
1) Можно решить задачу с помощью системы неравенств.
*2) Отметим, что предположение, что попарная сумма монет **строго** равна 9, 8 и 7 соответственно, не является доказательством, что нет других вариантов решения задачи (в зависимости от текста решения за это снижали от 2 до 4 баллов).*
3) Отсутствие примера не доказывает, что максимальное число монет возможно в реальности (за это снижали на 2 балла).

6. (7 баллов) Сколько правдивых? За круглым столом сидят 38 попугаев и Мартышка. Известно, что каждый из них либо всегда лжет (таких будем называть «лжецами»), либо всегда говорит правду (таких будем называть «правдивыми»). Мартышка задала каждому попугаю один и тот же вопрос: «Кем является Ваш сосед справа – правдивым или лжецом?». Первые два попугая **(справа от Мартышки)** ответили: «мой сосед справа – лжец». Следующие два: «мой сосед справа – правдивый», следующие два: «мой сосед справа – лжец» и так далее. По окончании опроса Мартышка сказала: «Среди нас не менее 9 правдивых». Сколько правдивых было на самом деле?
***Примечание:* фраза в скобках была пропущена, но об этом говорили участникам при ответах на вопросы во время олимпиады.**
Ответ: 29 правдивых.
Решение.
I. Если опрос шел справа налево, считая от Мартышки (против часовой стрелки).
Возможны два случая
1) Пусть сидящий справа от Мартышки попугай – лжец. Тогда попугаи сидят в следующей последовательности (образуют цикл): *ЛПЛЛ ЛПЛЛ…* и т.д.
Значит 38 попугай, сидящий слева от Мартышки, – правдивый, а сама Мартышка – лжец.

В этом случае 10 правдивых попугаев и 29 лжецов, считая Мартышку.
Получается, что Мартышка сказала правду, а этого не может быть.
2) Пусть справа от Мартышки сидит правдивый попугай. Тогда попугаи сидят в следующей последовательности (образуют цикл): *ПЛПП ПЛПП…* и т. д.
Значит сидящий слева от Мартышки попугай – лжец, а сама Мартышка – правдива. Всего в этом случае 29 правдивых, включая Мартышку, и 10 лжецов.
Следовательно, Мартышка сказала правду. Противоречия нет.

II. Если опрос шел слева направо, считая от Мартышки (по часовой стрелке)
Также надо рассмотреть 2 варианта:
1) Мартышка правдива (или соответственно первый слева попугай лжец). Тогда попугаи сидят в следующей последовательности (считая слева направо): ЛППП ЛППП… и т.д. (образуют цикл)
В этом случае 29 правдивых, включая Мартышку, и 10 лжецов.
2) Мартышка – лжец (или соответственно первый слева попугай правдивый). Тогда попугаи сидят в следующей последовательности (считая слева направо): ПЛЛЛ ПЛЛЛ… и т.д. (образуют цикл)
В этом случае 10 правдивых попугаев и 29 лжецов, считая Мартышку.
Получается, что Мартышка сказала правду, а этого не может быть. Получаем противоречие.
Ответ также 29 правдивых.
Примечания:
1) К сожалению, многие невнимательно прочитали первые два предложения условия задачи (т.е. Мартышка ***сидит со всеми в одном кругу*** *и как и все* ***может лгать или говорить правду****), что приводило к тому, что многие забывали в решении указывать Мартышку или учитывать ее высказывание при рассмотрении двух случаев (за это давалось не более 4 баллов).*
2) Если участники решали задачу исходя из того, что опрос шел в произвольном порядке, а не по кругу, считая от Мартышки, то работа оценивалась по тому, как ее понял школьник (таких работ было всего 5, в одном случае решение было зачтено, как верное).